

Nom : .....

Devoir surveillé n°1

La calculatrice est autorisée. Le barème est indiqué à titre indicatif.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Tout échange verbal ou de matériel (sans l'accord du professeur) sera sanctionné. **Le sujet est à rendre avec la copie (même si vous n'avez rien écrit dessus).**

**Tous les élèves traitent le premier exercice, mais seuls les élèves de spécialité Maths traitent les deux exercices.**

**BON COURAGE!!**

**Exercice d'enseignement obligatoire : une étude de fonction**

On considère la fonction  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2x - 8}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$  et on note  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique.

1. On admet que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Calculer les limites en 4 de  $f$  à gauche et à droite.
3. Que peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}_f$  ?
4. Étudier les variations de  $f$  (on fera le tableau de variation complet de la fonction en faisant apparaître les limites).
5. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .
  - (a) Montrer que pour  $x \neq 4$  :  $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{2}{x - 4}$ .
  - (b) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\Delta$ .
  - (c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \right]$ . Que peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}_f$  ?
6. Dans un repère, placer les points  $A(2; 1)$ ,  $B(6; 5)$  puis tracer  $\Delta$ , la droite d'équation  $x = 4$  et enfin l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice de spécialité : divisibilité dans  $\mathbb{Z}$**

1. Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $4n + 1$  divise  $n - 4$ .
2. Déterminer les couples  $(x; y)$  d'entiers naturels tels que  $x^2 = y^2 + 17$ .
3.
  - (a) Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair.
  - (b) Démontrer que lorsque  $n$  est un entier impair, 8 divise  $n^2 - 1$ .